E.N.S. FONTENAY SAINT-CLOUD

Option Mathématiques

Mathématiques I

Durée : 4 heures

I

Tous les espaces vectoriels considérés dans ce problème sont des espaces vectoriels de dimension finie sur $\mathbb{C}$ le corps des nombres complexes.

Si V est un tel espace, End V est l'ensemble des applications $\mathbb{C}$ – linéaires de V dans V muni de sa structure naturelle de $\mathbb{C}$ – espace vectoriel. Id_V (ou Id quand aucune confusion n'est possible) est l'application identique de V dans V; si $u, v \in \mathrm{End}\, V$, $u \circ v$ est l'application telle que $u \circ v(x) = u(v(x))$ pour tout $x \in V$.

Par définition $u^i = \underbrace{u \circ u \circ \ldots \circ u}_{i \text{ fois}}$ si $i \geqslant 1$.

Par convention, on pose $u^0 = \mathrm{Id}_V$.

On dit que $u \in \mathrm{End}\, V$ est nilpotent s'il existe un entier naturel $r \geqslant 1$ tel que $u^r = 0$.

Soit $u \in \mathrm{End}\, V$. On appelle commutant de u le sous-espace vectoriel Γ_u de End V :

$$\Gamma_u = \{ v \in \mathrm{End}\, V : u \circ v = v \circ u \}.$$

Si $(e_i)_{i=1 \ldots p}$ est une base de V et si $u \in \mathrm{End}\, V$ est l'endomorphisme défini par :

$$u(e_j) = \sum_{i=1 \ldots p} u_{ij}\, e_i$$

$(u_{ij})_{i=1 \ldots p,\ j=1 \ldots p}$, où i est l'indice de la ligne et j celui de la colonne, est la matrice représentant u.

Tr u désignant la trace de u, on a alors $\mathrm{Tr}\, u = \sum_{i=1 \ldots p} u_{ii}$.

L'espace vectoriel de dimension finie End V est muni de la topologie provenant d'une quelconque des normes équivalentes qu'on peut lui associer naturellement. Par exemple, si u est représenté par la matrice (u_{ij}) dans une base de V :

$$\| u \| = \sup_{i,j} | u_{ij} |$$

est une norme sur End V.

En particulier, on dira qu'une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de End V tend vers $u \in \mathrm{End}\, V$ s'il existe une base de V telle que, (u_{ij}^n), (u_{ij}) désignant respectivement les matrices de u_n et u dans cette base, $u_{ij} = \lim_n u_{ij}^n$ pour tout i, j, $i = 1 \ldots p$, $j = 1 \ldots p$.

Les candidats sont invités à rédiger leur solution avec le maximum de clarté et de précision. Il en sera tenu compte dans la notation.

I

Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel V de dimension finie sur $\mathbb{C}$. On désigne par λ_i, $i = 1 \ldots r$, les zéros sur $\mathbb{C}$ de son polynôme caractéristique, par p_i leurs ordres de multiplicité respectifs, par V_i le sous-espace propre noyau de $u - \lambda_i\, \mathrm{Id}$, par N_i le sous-espace caractéristique noyau de $(u - \lambda_i\, \mathrm{Id})^{p_i}$.

1° Montrer que si $v \in \Gamma_u$, $v(V_i) \subset V_i$, $i = 1 \ldots r$.

2° Montrer que si u est diagonalisable,

$$\Gamma_u = \{ v \in \mathrm{End}\, V : v(V_i) \subset V_i,\ i = 1 \ldots r \}$$

Quelle est alors la dimension sur $\mathbb{C}$ de Γ_u en fonction de $p_1, \ldots, p_r$?

3° Montrer que si $v \in \Gamma_u$, $v(N_i) \subset N_i$, $i = 1 \ldots r$.

En déduire qu'il existe $h \in \mathrm{End}\, V$ diagonalisable et $w \in \mathrm{End}\, V$ nilpotent tel que :

$$u = h + w, \quad h \circ w = w \circ h \quad \text{et} \quad \Gamma_u = \Gamma_h \cap \Gamma_w$$

On utilisera le fait que V est somme directe des N_i, $i = 1 \ldots r$.

1984

II

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de End V tendant vers $u \in$ End V.

1° Montrer que pour n assez grand, le rang de u_n est supérieur ou égal au rang de u. Donner un exemple où cette inégalité est stricte.

2° En déduire que pour n assez grand :

$$\dim_{\mathbb{C}} \Gamma_{u_n} \leqslant \dim_{\mathbb{C}} \Gamma_u$$

On interprétera convenablement Γ_u comme le noyau d'un endomorphisme d'un certain espace vectoriel.

III

Dans cette section, u est un endomorphisme nilpotent d'un espace vectoriel V de dimension finie p sur $\mathbb{C}$. On suppose que $u^r = 0$ et $u^{r-1} \neq 0$ pour un entier $r \geqslant 1$.

1° Soit $F_i = \{ x \in V \ : \ u^i(x) = 0 \}$, $i = 1 \ldots r$.

Montrer que la suite de sous-espaces :

$$0 = F_0 \subset F_1 \subset \ldots \subset F_i \subset F_{i+1} \subset \ldots \subset F_r = V$$

est strictement croissante et que $u(F_i) \subset F_{i-1}$, $i = 1 \ldots r$.

2° Montrer qu'il existe des sous-espaces vectoriels $G_1, \ldots, G_r$ et $H_1, \ldots, H_{r-1}$ de V tels que :

a. $F_i = G_i \oplus F_{i-1}$, $i = 1 \ldots r$.

b. u applique injectivement G_i dans G_{i-1} pour tout i tel que :

$$2 \leqslant i \leqslant r.$$

c. $G_i = u(G_{i+1}) \oplus H_i$, $i = 1 \ldots r-1$.

3° En déduire que V possède une base de la forme :

$$\begin{array}{l} e_{r,1} \ \ldots \ e_{r,s_r} \\ u(e_{r,1}) \ \ldots \ u(e_{r,s_r}) \ ; \ \ e_{r-1,1} \ \ldots \ e_{r-1,s_{r-1}} \\ \vdots \\ u^{r-1}(e_{r,1}) \ \ldots \ u^{r-1}(e_{r,s_r}) \ ; \ \ u^{r-2}(e_{r-1,1}) \ \ldots \ u^{r-2}(e_{r-1,s_{r-1}}) \ ; \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \ldots \ ; \ \ e_{1,1} \ \ldots \ e_{1,s_1} \end{array}$$

où $\dim_{\mathbb{C}} H_i = s_i \geqslant 0$, $i = 1 \ldots r-1$,

$\dim_{\mathbb{C}} G_r = s_r > 0$ et $u^k(e_{k,j}) = 0$

si $j = 1 \ldots s_k$, $k = 1 \ldots r$.

4° En déduire que V possède une base dans laquelle la matrice représentant u est de la forme :

$$\begin{pmatrix} 0 & \varepsilon_1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_2 & \ldots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \varepsilon_{p-1} \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

où chaque ε_i est égal à 1 ou 0.

IV

Dans les deux premières questions de cette section, u est un endomorphisme nilpotent comme en III dont nous utilisons les notations.

On pose $p_i = \dim_{\mathbb{C}} G_i$, $i = 1 \ldots r$. Choisissant $e_1, \ldots, e_p$ une base de V dans laquelle la matrice représentant u a la forme indiquée en III. 4°, on désigne par E_{ij}, $i = 1 \ldots p$, $j = 1 \ldots p$ l'endomorphisme de V tel que :

$$E_{ij}(e_k) = 0 \qquad \text{si } k \neq j$$
$$E_{ij}(e_j) = e_i$$

et par E_k, $k = -(p-1), \ldots, 0, \ldots, p-1$ le sous-espace vectoriel de End V :

$$E_k = \sum_{\sup(1,\,1-k) \,\leqslant\, i \,\leqslant\, \inf(p-k,\,p)} \mathbb{C}\, E_{i,\,i+k}$$

1° *a*. A quelles conditions sur i, j a-t-on $E_{ij} \in \Gamma_u$? En déduire que le nombre maximum de E_{ij} linéairement indépendants dans Γ_u est p_1^2.

b. Montrer que $\Gamma_u = \bigoplus_{-(p-1) \leqslant k \leqslant p-1} \Gamma_u \cap E_k$.

c. Supposons que $E_{ij} \notin \Gamma_u$; soit $\alpha \in \mathbb{C}$, $\alpha \neq 0$; à quelles conditions sur i, j, α a-t-on $U_{ij\alpha} = E_{ij} + \alpha E_{i+1, j+1} \in \Gamma_u$? En déduire que le nombre maximum de $U_{ij\alpha}$ linéairement indépendants dans Γ_u est p_2^2.

d. Montrer que $\dim_{\mathbb{C}} \Gamma_u = p_1^2 + \ldots + p_r^2$.

2° *a*. Montrer qu'il existe une base de V dans laquelle la matrice de u se met par blocs sous la forme (A_{ij}) où A_{ij} est une matrice à p_i lignes et p_j colonnes telle que $A_{ij} = 0$ si $i \geqslant j$.

b. Soit $\varepsilon = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_r)$ une suite de r nombres complexes 2 à 2 distincts. Soit u_ε l'endomorphisme dont la matrice dans cette même base est donnée par (U_{ij}) où U_{ij} est la matrice à p_i lignes et p_j colonnes telle que $U_{ij} = 0$ si $i \neq j$, $U_{ii} = \varepsilon_i \mathrm{Id}$, $i = 1 \ldots r$. Montrer que $u + u_\varepsilon$ est diagonalisable.

c. En déduire que tout endomorphisme nilpotent u est limite d'endomorphismes diagonalisables $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tels que :

$$\dim_{\mathbb{C}} \Gamma_{u_n} = \dim_{\mathbb{C}} \Gamma_u .$$

3° u est maintenant un endomorphisme quelconque de V. Construire en utilisant I. 3° et IV. 2° une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'endomorphismes diagonalisables de V tendant vers u et telle que :

$$\dim_{\mathbb{C}} \Gamma_{u_n} = \dim_{\mathbb{C}} \Gamma_u .$$

V

Étant donné $u \in \mathrm{End}\ V$, on considère l'application linéaire $L_u : \mathrm{End}\ V \to \mathrm{End}\ V$ définie par :

$$L_u(v) = u \circ v - v \circ u = [u, v].$$

Étant donné $(u, v) \in \mathrm{End}\ V \times \mathrm{End}\ V$, on pose :

$$K(u, v) = \mathrm{Tr}(L_u \circ L_v)$$

où Tr désigne la trace de l'endomorphisme $\mathrm{End}\ V \to \mathrm{End}\ V$ indiqué (cf. introduction).

1° Montrer que K est une forme bilinéaire symétrique sur $\mathrm{End}\ V \times \mathrm{End}\ V$ et que $K([u, v], w) = K(u, [v, w])$ pour tout u, v, w dans End V.

2° Soit u un endomorphisme diagonalisable de End V comme en I. 2° dont nous utilisons les notations.

$$\text{Soit } P = \left\{ v \in \mathrm{End}\ V : v\left(\bigoplus_{i=1}^{j} V_i\right) \subset \bigoplus_{i=1}^{j} V_i,\ j = 1 \ldots r \right\}$$

a. Montrer que :

$$\dim_{\mathbb{C}} P = \frac{1}{2}(\dim_{\mathbb{C}} \mathrm{End}\ V + \dim_{\mathbb{C}} \Gamma_u)$$

b. Montrer que :

$$K([u, v], w) = 0 \quad \text{pour tout } v, w \in P.$$

3° u est un endomorphisme nilpotent de End V comme en III dont nous utilisons les notations.

$$\text{Soit } P = \{ v \in \mathrm{End}\ V : v(F_i) \subset F_i \quad i = 1 \ldots r \}$$

a. Montrer que :

$$\dim_{\mathbb{C}} P = \frac{1}{2}(\dim_{\mathbb{C}} \mathrm{End}\ V + \dim_{\mathbb{C}} \Gamma_u)$$

b. Montrer (soit directement, soit en utilisant IV. 2° et V. 2°) que $K([u, v], w) = 0$ pour tout v, w dans P.